نظرية الأعداد:
- الاستقراء الرياضي
- قابلية القسمة في Z
- الأعداد الأولية
- التطابقات
- المعادلات الديوفانتية
- ثلاثيات فيثاغورث
- الدوال العددية الضربية
- بعض الدوال الخاصة.
- الجذور الأولية والأدلة.

الاستقراء الرياضي

لإثبات صحة قضية ما (عبارة) ونرمز P_n (تتعلق بالعدد الطبيعي n) نتبع الخطوتين (المرحلتين):

• الخطوة الأساسية:
نثبت صحة العبارة من أجل n_0 ($n_0 \in N$)

• خطوة الاستقراء:
نفرض صحة العبارة من $n=k$ (من أجل جميع الأعداد التي أصغر أو تساوي k)
ونثبت صحتها من أجل $n=k+1$
عندئذ القضية (العبارة) صحيحة لكل $n \geq n_0$

مثال: اثبت أن:

$$n \geq 1 : \quad 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نتبع الاستقراء الرياضي:

• الخطوة الأساسية: عندما $n=1$ نجد الطرف اليساري يساوي 1.
الطرف اليميني يساوي $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

/ /

فالقضية صحيحة من أجل n=1

• خطوة الاستقراء: نفرض صحتها من أجل n=k أي

$$1+2+3+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

ولنثبت أن

$$(1+2+3+\dots+k)+k+1 \overset{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)k+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

مثال:

$$(1)^2+(2)^2+(3)^2+\dots+(n)^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

متراجحة برنولي: $n\geq 2$ و $(1+x)^n>1+nx$ و $0\neq x>-1$

• الخطوة الأساسية عندما $n=2$

$$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$$

لأن $0<x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

• خطوة الاستقراء: نفرض صحتها من أجل $n=k\geq 2$ ولنثبت صحتها من أجل $n=k+1$

$k\geq 2:\quad (1+x)^k>1+kx \quad ---(*)$

$$(1+x)^{k+1}\overset{?}{>}1+(k+1)x$$

نضرب (*) بـ $(1+x)$ الموجب فرضاً لأن $-1<x$ (أي $1+x>0$)

$$(1+x)^k(1+x)>(1+kx)(1+x)$$

$$(1+x)^{k+1}>1+x+kx+kx^2=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x$$

لأن $k\geq 2$ و x^2 موجب فإن kx^2 موجب

$$\Rightarrow (1+x)^{k+1}>1+(k+1)x$$

القضية صحيحة مهما تكن $n\geq 2$

/ /

تطبيقات: سؤال امتحان $\{1,2,...\}$

① من اجل اي عددين طبيعيين $n, m \in \mathbb{N}$ و $m>1$ يكون $m^n > n$

$m>1 \Leftarrow x=(m-1)>0$

نلاحظ ان $x>-1$ وغير معدوم

$(m-1)>0 \Leftarrow$ نضرب بـ n

$$n(m-1) \geq n$$

$$m^n = [1+\underbrace{(m-1)}_{x}]^n > 1+n(m-1) \geq 1+n > n$$

② اثبت ان: $2^n > n$; $n \geq 1$

• الخطوة الاساسية عندما $n=1$

$$2>1$$

القضية صحيحة.

• خطوة الاستقراء: نفرض صحتها من اجل $n=K \geq 1$

$$2^K > K \quad --- (*)$$

ولنثبت صحتها من اجل $n=K+1$

$$2^{K+1} > K+1$$

نضرب $(*)$ بـ 2

$$2^{K+1} > 2K = K+K \geq K+1 \Rightarrow 2^{K+1} > K+1$$

③ اثبت ان $2^n > n^2$; $n \geq 5$

$$K^2 \geq 3K = 2K+K > 2K+1$$

④ سؤال دورة:

لتكن المتتالية $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ حيث

$a_0=1$; $a_1=2$; $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$; $\forall\ n \geq 2$

$1, 2, 4(2-1), 4(4-2), ----$

/ /

اثبت ان $a_n = 2^n$ ، $\forall n \geq 0$

بملاحظة

$$\begin{cases} 2^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \\ 2^1 = 2 \quad a_1 = 2 \end{cases}$$

الخطوة الاساسية صحيحة من اجل $n=0$ و $n=1$

• الخطوة الاستقرائية:

نفرض انها صحيحة من اجل $0 \leq m \leq K$ ونثبت صحتها من اجل $K+1$

اي

$\forall m \geq 0 \quad 0 \leq m \leq K$ ، $a_m = 2^m$

$$a_{K+1} \stackrel{?}{=} 2^{K+1}$$

$$a_{K+1} = 4a_K - 4a_{K-1} = 4(2^K) - 4(2^{K-1})$$
$$= 2^{K+2} - 2^{K+1} = 2^{K+1}(2-1) = 2^{K+1}$$

تمرين: اثبت ان

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 \quad , n > 1$$

اثبت ان $\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{a.b}$ ، $\forall a, b \geq 0$

(الوسط الحسابي) (الوسط الهندسي)

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2a.b + b^2 \geq 0$$
$$a^2 + b^2 \geq 2a.b$$
$$(a+b)^2 - 2ab \geq 2a.b$$
$$(a+b)^2 \geq 4a.b$$
$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq a.b \quad \underset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$$

وكذلك تعميم هذه المتراجحة على الشكل:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \geq \sqrt[n]{a_1 . a_2 \cdots a_n}$$

/ /

تمرين:

$$\binom{n}{K} + \binom{n}{K-1} = \binom{n+1}{K}$$

« قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ وتطبيقاتها »

تعريف:

$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ مفكوك ذي الحدين (ax+by)

/ /

- قابلية القسمة في Z وتطبيقاتها ،،

تعريف: ليكن $a,b\in\mathbb{Z}$ ، $a\neq 0$ نقول إن a يقسم b ونكتب a/b إذا وفقط وإذا وجد عدد صحيح آخر c بحيث أن

$$\exists c\in\mathbb{Z} ;\ ac=b$$

ويقال: إن b مضاعف لـ a

وإذا لم يوجد مثل العدد c الذي يحقق الشرط السابق فنقول إن a لا يقسم b أو b ليس مضاعف لـ a.

مثال: $3/15$ لأن $3.5=15$

بعض الخواص العامة:

1- إن 1 يقسم أي عدد صحيح والعدد 0 هو عدد مضاعف لأي عدد صحيح.

2- إذا كان a يقسم b فإن -a يقسم b.

3- كل عدد يقسم نفسه.

4- إذا كان a يقسم b فإن a يقسم k.b.

$$a|b \Rightarrow a|k.b \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

5- إذا كان a يقسم b و b يقسم d فإن a يقسم d.

6- إذا قسم عدد ما عددين صحيحين فإنه يقسم أي تركيب لهما بأمثال كلية صحيحة فقط

$$a|b \ , a|d \ ; \ a|(dx+by) \ ; \ \forall x,y\in\mathbb{Z}$$

- يمكن تعميم هذه الخاصية.

7- إذا كان $c\neq 0$

$$a|c \Rightarrow |a|\leq|c|$$

8- إذا كان a يقسم c و c يقسم a

$$a|c \ , c|a \Leftrightarrow |a|=|c|$$

/ /

ملاحظة: ان مجموعة القواسم الموجبة لأي عدد صحيح غير صفري مجموعة منتهية لأن جميع هذه القواسم كلها أصغر أو يساوي من القيمة المطلقة $|a|$ وبالتالي حتماً منتهية.

المبرهنة الأساسية في الحساب (مبرهنة اقليدس):

اذا كان a و b عددين صحيحين و $a \neq 0$ فيوجد عددان صحيحان وحيدان q و r بحيث أن

$$b = q.a + r \quad ; \quad 0 \leq r < |a|$$

(r: باقي القسمة)

مثال:

$$b = 20 \; ; \; a = 3$$

$$20 = 3.6 + 2 \; ; \; r = 2$$

$$-20 = (-7)(3) + 1 \; ; \; r = 1$$

$$20 = (-6)(-3) + 2 \; ; \; r = 2$$

$$-20 = (7)(-3) + 1$$

مثال

$$b = 0 \; , \; a = -6$$

$$0 = (0)(-6) + 0 \; , \; r = 0$$

مثال

$$b = -3 \; ; \; a = 79$$

$$-3 = (-1)(79) + (76)$$

تطبيق:

اثبت أن أي عدد فردي صحيح يكتب على الصورة:

$$a = 4q + 1 \quad \text{or} \quad 4q + 3$$

«أي فردي باقي قسمته على 4 إما 1 أو 3»

الحل: باقي قسمة أي عدد صحيح على 4 هو:

$$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

أي عدد صحيح a يكتب على إحدى الصور الآتية

$a = 4q$ ← ليس فردياً

$a = 4q + 1$ $\qquad$ $a = 4q + 3$

$a = 4q + 2$ ← ليس فردياً

/ /

أي اذا كان a فرديا فانه على الصورة

باقي قسمته على 4 هو 1 $\quad a=4q+1$

باقي قسمته على 4 هو 3 $\quad a=4q+3$

سؤال اضافي

اثبت ان مربع اي عدد فردي يزيد العدد 1 عن مضاعف للعدد 8

(باقي قسمة مربع اي عدد فردي على 8 يساوي 1)

اي اذا كان a فرديا فانه

$$a^2 = 8M+1$$

بما ان a فردي فله احدى الصورتين

$i \text{ --- } a=4q+1$

$ii \text{ --- } a=4q+3$

$$(i): \quad a^2 = (4q+1)^2 = 16q^2+8q+1$$
$$= 8\underbrace{[2q^2+q]}_{\in \mathbb{Z}}+1 = 8M_1+1$$

حيث $M_1 = 2q^2+q \in \mathbb{Z}$

مناقشة مماثلة

$$(ii): \quad a^2 = 16q^2+24q+9$$
$$=(16q^2+24q+8)+1$$
$$=8(2q^2+3q+1)+1$$

حل2:

ان باقي قسمة اي فردي على 2 يساوي 1 اي ان

اذا كان a فرديا فانه $\quad a=2q+1$

لذلك بتربيعه

$$a^2=4q^2+4q+1$$
$$=4q(q+1)+1 \quad \text{و} \quad q(q+1)=2n$$

جداء اي عددين متتاليين هو عدد زوجي

$$a^2 = 8n+1$$

/ /

تمرين ١: اثبت أن العدد 6 يقسم $(5m^3+7m)$

أي $6 \mid (5m^3+7m)$

بطريقة الاستقراء الرياضي.